

卷 1 2025 年北京市初中学业水平考试

1. **D** **解析** A、B 中的图形是轴对称图形,不是中心对称图形,故 A、B 不符合题意;C、图形是中心对称图形,不轴对称图形,故 C 不符合题意;D、图形既是轴对称图形又是中心对称图形,故 D 符合题意. 故选 D.

2. **D** **解析** 观察数轴可知: $-2 < a < -1$, $0 < b < 1$, $|a| > |b|$, $\therefore a + b < 0$, $a - b < 0$, \therefore A、B、C 选项的结论错误, D 选项的结论正确, 故选 D.

上分警示

利用数轴比较大小

距离原点越远的点所表示的数的绝对值更大, 和这个点在原点的左侧或右侧无关.

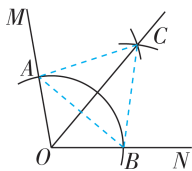
3. **C** **解析** \therefore 一个六边形的每个内角都是 x° , \therefore 这个六边形为正六边形, \therefore 每个内角的度数为 $(6-2) \times 180^\circ \div 6 = 120^\circ$, 故选 C.

4. **A** **解析** 由题意知, 共有 6 种等可能的结果, 其中摸出的球是白球的结果有 1 种, \therefore 摸出的球是白球的概率为 $\frac{1}{6}$. 故选 A.

5. **C** **解析** \therefore 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个相等的实数根, $\therefore \Delta = 0$ 且 $a \neq 0$. $\therefore 2^2 - 4a = 0$ 且 $a \neq 0$. $\therefore a = 1$. 故选 C.

6. **C** **解析** $45 \times 4 \times 10^5 \text{ km} = 18\,000\,000 \text{ km} = 1.8 \times 10^7 \text{ km}$, 故选 C.

7. **B** **解析** 连接 AB, AC, BC , 由作图可得, $OA = OB, AC = BC = AB$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore \angle ACB = 60^\circ$. $\therefore OC = OC$, (关键点: $\triangle ABC$ 是边长为 AB 的等边三角形)
 $\therefore \triangle OAC \cong \triangle OBC$ (SSS), $\therefore \angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ$, $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 50^\circ$, $\therefore \angle OAC = 180^\circ - \angle AOC - \angle ACO = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$. 故选 B.



8. **A** **解析** 设点 M 坐标为 $(a, \frac{1}{a})$, 点 N 坐标为 $(b, \frac{1}{b})$, 则 $A(a, 0), B(0, \frac{1}{b}), C(a, \frac{1}{b})$, $\therefore OB = AB = \frac{1}{b}, OA = BC = a$, $BN = b, AM = \frac{1}{a}, CN = a - b, CM = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, $\therefore S_{\triangle COM} = \frac{1}{2} CM \times OA = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) \times a = \frac{a}{2b} - \frac{1}{2}$, $S_{\triangle CON} = \frac{1}{2} CN \times OB = \frac{1}{2} \times (a - b) \times \frac{1}{b} = \frac{a}{2b} - \frac{1}{2}$, $\therefore S_{\triangle COM} = S_{\triangle CON}$, 故结论①正确; $S_{\triangle MCN} =$

$$\frac{1}{2} CN \cdot CM = \frac{1}{2} \times (a - b) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{(a - b)^2}{2ab}, S_{\triangle MON} =$$

$$S_{\text{矩形}OACB} - S_{\triangle OBN} - S_{\triangle OAM} - S_{\triangle MCN} = a \times \frac{1}{b} - \frac{1}{2} \times b \times \frac{1}{b} - \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{a} -$$

$$\frac{(a - b)^2}{2ab} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}, \text{当 } \triangle MON \text{ 与 } \triangle MCN \text{ 的面积相等时,}$$

$$\frac{(a - b)^2}{2ab} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}, \text{即 } a = b, \text{当 } a = b \text{ 时, } M, N \text{ 重合, 与题意不}$$

符, 故结论②错误; \therefore 四边形 $OACB$ 是矩形, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOM$ 是 OM 与 x 轴夹角, $\angle BON$ 是 ON 与 y 轴夹角, M, N 在第一象限, $\therefore \angle AOM, \angle BON$ 均为锐角, 又 $\therefore \angle MON = 90^\circ - \angle AOM - \angle BON$, $\therefore \angle MON < 90^\circ$, 即 $\angle MON$ 是锐角, 过

O 作 $OH \perp MN$ 于 H , 由 $S_{\triangle MON} = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$ 是一个固定形式的正

数, 根据三角形面积公式 $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} MN \cdot OH$, $\therefore S_{\triangle MON} > 0$,

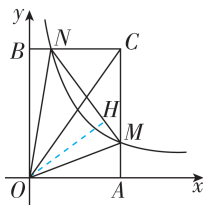
$\therefore OH > 0$, 在 $\triangle OMH$ 和 $\triangle ONH$ 中, $\angle OMH, \angle ONH$ 是直角三角形的锐角, $\therefore \angle OMH < 90^\circ, \angle ONH < 90^\circ$, 即 $\angle OMN < 90^\circ$, $\angle ONM < 90^\circ$, $\therefore \triangle MON$ 的三个角都是锐角, $\therefore \triangle MON$ 一定是锐角三角形, 故结论③正确; 假设 $\triangle MON$ 是等边三角形, 则 $OM = ON = MN$, 且 $\angle MON = 60^\circ$, 若 $OM = ON$, 则 $OM^2 =$

$$ON^2, \text{即: } a^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2, \text{整理得: } a^2 - b^2 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0,$$

$$\therefore (a^2 - b^2) \left(1 - \frac{1}{a^2 b^2}\right) = 0, \therefore a \neq b (M, N \text{ 不重合}), \therefore 1 -$$

$$\frac{1}{a^2 b^2} = 0, \therefore a^2 b^2 = 1, \therefore ab = 1, \text{此时 } OM = ON, \text{但结合角度条}$$

件 $\angle MON = 60^\circ$, 由于 $ab = 1$ 时, $\angle AOM + \angle BON = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, 但通过反比例函数和矩形的动态性, 无法同时满足角度和边长的严格等边要求, $\therefore \triangle MON$ 不可能是等边三角形, 结论④错误; 综上, ①③正确、②④错误, 故选 A.



9. $x \geq 1$ **解析** 若 $\sqrt{3x-3}$ 在实数范围内有意义, 则 $3x-3 \geq 0$, 解得 $x \geq 1$, 故答案为 $x \geq 1$.

10. $7(m+2)(m-2)$ **解析** 原式 $= 7(m^2 - 4) = 7(m+2)(m-2)$, 故答案为 $7(m+2)(m-2)$.

11. $x = 2$ **解析** 方程两边乘最简公分母 $x(x-6)$ 得, $2x + x - 6 = 0$, 解得 $x = 2$, 经检验 $x = 2$ 是原方程的解, 故答案为 $x = 2$.

12. 1 500 **解析** 由题意可得: 该地区七年级 2 000 名男生中 BMI 等级为正常的人数是 $2\,000 \times \frac{75}{100} = 1\,500$ 人, 故答案为

1 500.

13. -3, 1 (答案不唯一) 【解析】当 $a = -3, b = 1$ 时, $a^2 > 4b^2$, 但是 $a < 2b$, 故答案为 -3, 1 (答案不唯一).

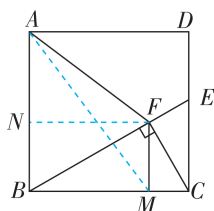
14. 43 【解析】 $\because \angle DOB = \angle FOB = 23.5^\circ, \therefore \angle DOF = \angle DOB + \angle FOB = 47^\circ, \because GD \parallel HF, \therefore \angle OFH = 180^\circ - \angle DOF = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ, \therefore FI$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore OF \perp FI, \therefore \angle OFI = 90^\circ, \therefore \angle IFH = 133^\circ - 90^\circ = 43^\circ$, 故答案为 43.

上分点拨

平行线的性质

由题得光线 $GD \parallel$ 光线 HF , 而两直线平行, 同旁内角互补, 由此可求得 $\angle OFH$.

15. $\frac{3}{8}$ 【解析】过点 F 分别作 $FM \perp BC, FN \perp AB$, 垂足为 M, N , 连接 AM , 则 $\angle FMC = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore \angle ABC = 90^\circ, \therefore \angle ABC = \angle FMC, \therefore AB \parallel FM, \therefore FN = BM, \therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot FN, S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM, \therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABM}$,
(关键点: $\triangle ABF$ 和 $\triangle ABM$ 同底等高, 面积相等)
 $\therefore CF \perp BE$, 垂足为 $F, AB = 1 = BC, \angle EBC = 30^\circ, \therefore \angle BFC = 90^\circ, CF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}, \therefore \angle CFM = 90^\circ - \angle BCF = 30^\circ, \therefore CM = \frac{1}{2} CF = \frac{1}{4}, \therefore BM = BC - CM = \frac{3}{4}, \therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, 故答案为 $\frac{3}{8}$.



16. (1) B (2) 157 【解析】(1) 当 $n = 2$ 时, A 经销商的利润为 60, 比 $n = 1$ 时增加 $60 - 40 = 20$ (万元), B 经销商的利润为 55, 比 $n = 1$ 时增加 $55 - 30 = 25$ (万元), C 经销商的利润为 40, 比 $n = 1$ 时增加 $40 - 20 = 20$ (万元), D 经销商的利润为 38, 比 $n = 1$ 时增加 $38 - 14 = 24$ (万元), $\therefore 25 > 24 > 20$, \therefore 应向经销商 B 分配 2 台设备, 故答案为 B ;
(2) 当给这四家经销商中的一家分配时, 最大利润为 D 经销商的 134 万元, 当分配给多家销售时: 当分配四家时, 最大利润为 $40 + 55 + 20 + 38 = 153$ (万元), 当分配给三家时, 最大利润为 $40 + 55 + 62 = 157$ (万元), 当分配给两家时, 最大利润为 $60 + 90 = 150$ (万元) 或 $40 + 110 = 150$ (万元), 综上所述: 企业可获得的总利润的最大值为 157 万元. 故答案为 157.

17. 【解】原式 $= 3 + 3\sqrt{3} + 2 - 2 \times \frac{1}{2}$ (4 分)
 $= 3 + 3\sqrt{3} + 2 - 1 = 4 + 3\sqrt{3}$. (5 分)

$$18. \begin{cases} 2(x+1) > x-1 \text{ ①} \\ \frac{x+5}{2} > 3x \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①, 得: $x > -3$, (2 分)解不等式②, 得: $x < 1$, (4 分) \therefore 原不等式组的解集为 $-3 < x < 1$. (5 分)

19. 【解】 $\because a + b - 3 = 0$,

$$\therefore a + b = 3, \text{ (1 分)}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{4a - 4b + 8b}{(a+b)^2} \text{ (2 分)}$$

$$= \frac{4(a+b)}{(a+b)^2} \text{ (3 分)}$$

$$= \frac{4}{a+b} \text{ (4 分)}$$

$$= \frac{4}{3}. \text{ (5 分)}$$

20. (1) 【证明】 $\because D, E$ 分别为 AB, AC 的中点,

 $\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE \parallel BC, \text{ (1 分)}$$

$$\therefore DG = FC,$$

 \therefore 四边形 $DFCG$ 是平行四边形, (2 分)

$$\text{又} \because DF \perp BC,$$

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ,$$

 \therefore 平行四边形 $DFCG$ 是矩形; (3 分)(2) 【解】 $\because DF \perp BC$,

$$\therefore \angle DFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ,$$

 $\therefore \triangle BDF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BF = DF = 3, \text{ (4 分)}$$

$$\therefore DG = FC = 5,$$

$$\therefore BC = BF + FC = 3 + 5 = 8,$$

由 (1) 可知, DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 四边形 $DFCG$ 是矩形,

$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC = 4, CG = DF = 3, \angle G = 90^\circ,$$

$$\therefore EG = DG - DE = 5 - 4 = 1, \text{ (5 分)}$$

$$\therefore CE = \sqrt{CG^2 + EG^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

 $\therefore E$ 为 AC 的中点,

$$\therefore AC = 2CE = 2\sqrt{10}. \text{ (6 分)}$$

21. 【解】(1) \because 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 3)$ 和 $(2, 5)$,

$$\therefore \begin{cases} k + b = 3 \\ 2k + b = 5 \end{cases}, \text{ (1 分)}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = 1 \end{cases}; \text{ (2 分)}$$

(2) 由 (1) 可得函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的解析式为 $y = 2x + 1$, 函数 $y = x + k$ 的解析式为 $y = x + 2$,

当 $mx < 2x+1$ 时, 则 $(m-2)x < 1$,

当 $mx < x+2$ 时, 则 $(m-1)x < 2$, (3分)

\therefore 当 $x < 1$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = mx$ ($m \neq 0$) 的值既小于函数 $y = kx+b$ 的值, 也小于函数 $y = x+k$ 的值,

$\therefore m-2 \geq 0$, 且 $m-1 \geq 0$,

$\therefore m \geq 2$,

当 $m=2, x < 1$ 时, $2x < 2x+1$ 和 $x < 2$ 恒成立, 故 $m=2$ 符合题意;

当 $m > 2$ 时, 则 $x < \frac{1}{m-2}$ 且 $x < \frac{2}{m-1}$,

当 $\frac{1}{m-2} \geq \frac{2}{m-1}$ 时, 则 $\frac{2}{m-1} \geq 1$.

解不等式 $\frac{1}{m-2} \geq \frac{2}{m-1}$ 得 $m \leq 3$, 解不等式 $m \leq 3$,

$\therefore 2 < m \leq 3$;

当 $\frac{1}{m-2} < \frac{2}{m-1}$ 时, 则 $\frac{1}{m-2} \geq 1$,

解不等式 $\frac{1}{m-2} < \frac{2}{m-1}$ 得 $m > 3$, 解不等式 $\frac{1}{m-2} \geq 1$ 得 $m \leq 3$, 此

时不符合题意;

综上所述, $2 \leq m \leq 3$. (5分)

22. 【解】设胸腹高为 x cm, 则单根膀条长为 $5x$ cm, 门条 AD

的长度为 $(5x-10)$ cm, $BC = \frac{5}{9}(5x-10)$ cm, $AB = CD = x$, 头

部高为 x , 尾部高为 $2x$ cm, 这只风筝的骨架的总高为 $4x$ cm, (2分)

由 $AD = AB + BC + CD$,

可得 $5x-10 = x + \frac{5}{9}(5x-10) + x$,

解得 $x = 20$; (5分)

所以这只风筝的骨架的总高 $4x = 80$ cm,

答: 这只风筝的骨架的总高 80 cm. (6分)

23. 【解】(1) 甲的 10 次测试成绩排列为: 12.1, 12.1, 12.5,

12.5, 12.5, 12.5, 12.5, 12.7, 12.7, 12.9, \therefore 中位数 $m =$

$\frac{12.5+12.5}{2} = 12.5$, 故答案为 12.5; (1分)

(2) 乙的 10 次测试成绩平均数为: $12.6 + 12.6 + 12.3 +$

$12.5 + 12.5 + 12.7 + 12.5 + 12.7 + 12.4 + 12.2 = 12.5$, \therefore 方差

为: $n = [(12.6-12.5) \times 2 + (12.3-12.5) \times 2 + (12.5-12.5) \times 3 +$

$(12.7-12.5) \times 2 + (12.4-12.5) \times 2 + (12.2-12.5) \times 2] = 0.024$, $\therefore n < 0.056$, 故答案为 <; (3分)

(3) 丙的平均数 $p =$

$\frac{12.4+12.4+12.5+12.7+12.8+12.8+12.8+12.8+12.9+12.9}{10} =$

12.7, \therefore 丙的平均数最大, 则实力最弱, \therefore 方差 $0.024 <$

$0.034 < 0.056$, \therefore 乙实力最强, \therefore 丁的测试成绩中位数为

12.45, \therefore 第 5, 6 次成绩和为 24.9, \therefore 前 5 次测试成绩小于

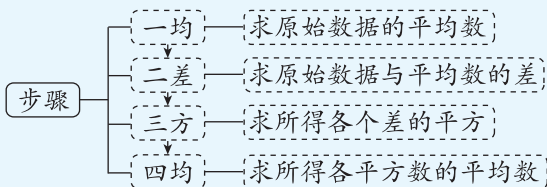
平均数, 甲测试成绩小于平均数 12.5 的次数有 2 次, \therefore 丁

比甲强, \therefore 这四名运动员按实力由强到弱依次为: 乙、丁、

甲、丙, 故答案为乙、丁、甲、丙. (5分)

上分心得

求方差的步骤



24. (1) 【证明】 $\because AP, BP$ 分别切 $\odot O$ 于 A 点, B 点,

$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$,

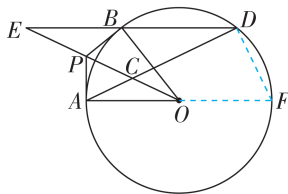
$\therefore \angle AOP = \frac{1}{2} \angle AOB$, (1分)

又 $\because \overline{AB} = \overline{AB}$,

$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB$,

$\therefore \angle ADB = \angle AOP$; (2分)

(2) 【解】延长 AO 交 $\odot O$ 于点 F , 连接 DF , 则 $\angle ADF = 90^\circ$,



$\because AP, BP$ 分别切 $\odot O$ 于 A 点, B 点,

$\therefore PA \perp OA$,

$\because C$ 为 OP 的中点,

$\therefore PC = OC$,

$\therefore AC = OC = \frac{1}{2} OP$, (3分)

又 $\because AP = 10, \tan \angle AOP = \frac{1}{2}$,

$\therefore AO = \frac{AP}{\tan \angle AOP} = 20, OP = \sqrt{AO^2 + AP^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} =$

$10\sqrt{5}, AC = OC = \frac{1}{2} OP = 5\sqrt{5}, AF = 2AO = 40$, (4分)

$\because AC = OC$,

$\therefore \angle CAO = \angle AOC$,

又 $\because \angle PAO = \angle ADF = 90^\circ$,

$\therefore \frac{PO}{AO} = \frac{FA}{DA}$,

$\therefore DA = \frac{20}{10\sqrt{5}} \times 40 = 16\sqrt{5}, CD = DA - AC = 11\sqrt{5}$, (5分)

$\because \angle AOP = \angle ADB, \angle ACO = \angle ECD$,

$\therefore \triangle ACO \sim \triangle ECD$,

模型: “8” 字型

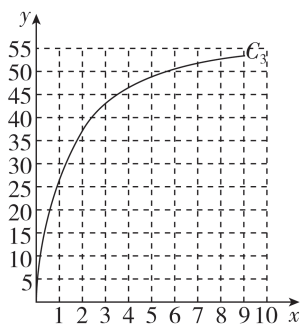
$\therefore \frac{AO}{ED} = \frac{CO}{CD}$,

$\therefore DE = \frac{11\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} \times 20 = 44$. (6分)

25. 【解】(1) 由曲线 C_1 看出, 当整数 x 的值为 6 时, y 的值首次超过 35, 故答案为 6; (1 分)

(2) $\because T=3$ 日的模拟练习时, 从试制阶段的第 2 日起, 一名新员工每一日比前一日多制成的合格品的个数逐渐减少或保持不变, 在试制阶段的第 3 日单日制成的合格品 43 个, 第 5 日单日制成的合格品 48 个, \therefore 相差 $48-43=5$ (个), 把 5 分成两个接近的数, $5=3+2$, \therefore 第 4 日增加 3 个, 第 5 日增加 2 个, $\therefore m=43+3=46$, (2 分)

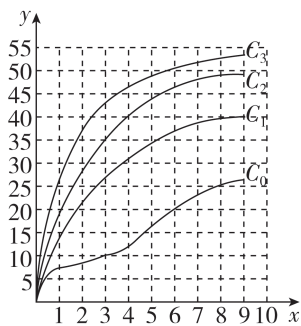
画出 $T=3$ 时的曲线 C_3 如下图; (3 分)



图(1)

(3) ①单日制成不少于 45 个合格品的只有 C_2 与 C_3 , C_3 : $T=3$ 日的模拟练习, 然后试制阶段第 $x=4$ 日制成的合格品达到 $y=46$ 个, $\therefore T+x=7$; C_2 : $T=2$ 日的模拟练习, 然后试制阶段第 $x=6$ 日制成的合格品达到 $y=45$ 个, $\therefore T+x=8$, $\therefore 7<8$, 故小云最早在完成理论学习后的第 7 日可获得“优秀学员”证书; 故答案为 7; (4 分)

②如图,



图(2)

当模拟练习 $T=0$ 日时,

4 日内的试制时间 $x=4-0=4$ 日,
4 日的合格产品分别是 7, 8, 10, 12,
 \therefore 合格产品共有 $7+8+10+12=37$;

当模拟练习 $T=1$ 日时,

4 日内的试制时间 $x=4-1=3$ 日,
3 日的合格产品分别是 12, 19, 26,
 \therefore 合格产品共有 $12+19+26=57$;

当模拟练习 $T=2$ 日时,

4 日内的试制时间 $x=4-2=2$ 日,
2 日的合格产品分别是 20, 30,
 \therefore 合格产品共有 $20+30=50$;

当模拟练习 $T=3$ 日时,

4 日内的试制时间 $x=4-3=1$ 日,

1 日的合格产品是 26;

$\therefore 26<37<50<57$,

\therefore 希望小腾在完成理论学习后的 4 日内制成的合格品的总数最多, 根据上述函数关系, 在这 4 日中应安排小腾先进行 1 日的模拟练习.

故答案为 1. (5 分)

26. 【解】(1) 将点 $O(0,0)$ 代入, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 可得 $c=$

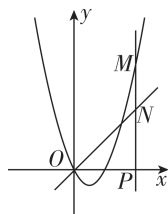
0, \therefore 该抛物线解析式为 $y=ax^2+bx$, (1 分)

将点 $A(3,3a)$ 代入, 抛物线 $y=ax^2+bx$,

可得 $3a=9a+3b$, 解得 $b=-2a$; (2 分)

(2) ①若 $a=1$, 则该抛物线及直线解析分别为 $y=x^2-2x$,
 $y=x$,

当 $t=4$ 时, 可有点 $P(4,0)$, 如下图,



图(1)

$\therefore PM \perp x$ 轴,

$\therefore x_M=x_N=4$,

将 $x=4$ 代入 $y=x^2-2x$, 可得 $y=4^2-2 \times 4=8$, 即 $M(4,8)$,

将 $x=4$ 代入 $y=x$, 可得 $y=4$, 即 $N(4,4)$,

$\therefore MN=8-4=4$; (4 分)

②当点 P 从点 O 运动到点 $B(2a,0)$ 的过程中,

$\therefore PM \perp x$ 轴, $P(t,0)$,

$\therefore x_M=x_N=t$,

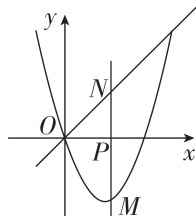
将 $x=t$ 代入 $y=ax^2-2ax$, 可得 $y=at^2-2at$, 即 $M(t, at^2-2at)$,

将 $x=t$ 代入 $y=ax$, 可得 $y=at$, 即 $N(t, at)$,

$\therefore MN=|at^2-2at-at|=|at^2-3at|$,

令 $MN=0$, 即 $at^2-3at=0$, 解得 $t=0$ 或 $t=3$,

若 $a>0$, 可有 $2a>0$, 即点 B 在 y 轴右侧, 如下图,



图(2)

当 $0<t \leq 3$ 时, 可有 $MN=-at^2+3at$, 其图象开口向下, 对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$,

若 MN 的长随 OP 的长的增大而增大, 即 MN 的长随 t 的

$$\therefore m \geq BG = \sqrt{OB^2 - OG^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

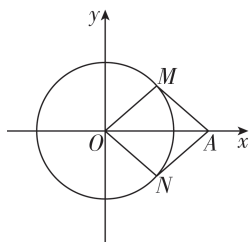
$\therefore m$ 的最小值为 $\sqrt{3}$,

故答案为 $\sqrt{3}$; (4 分)

(2) 由 (1) 可得, 当 A 在圆的外部时, 且 AM, AN 为圆的切线时, $\angle MAN$ 最大, 且 A 距离圆心越近,

$$\therefore 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ,$$

\therefore 当 $\angle MAN = 90^\circ$ 时, 由 $\angle TMA = \angle TNA = 90^\circ$, 如图,



图(3)

\therefore 四边形 $TMAN$ 是矩形,

$$\therefore TM = TA,$$

\therefore 四边形 $TMAN$ 是正方形,

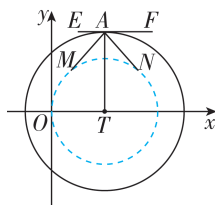
$$\therefore TA = \sqrt{2}TM = \sqrt{2}r,$$

当 $\angle MAN \geq 90^\circ$ 时, $r < TA \leq \sqrt{2}r$,

\therefore 点 $E(1, 3), F(4, 3), T(t, 0)$, $\odot T$ 经过原点, 线段 EF 上所有的点都是 $\odot T$ 的关联点, 则 $r = |t|$,

$\therefore EF$ 上距离 T 最近的点在 $t < TA \leq \sqrt{2}t$ 的圆环内,

① EF 和 $\sqrt{2}t$ 的圆相切, 如图,

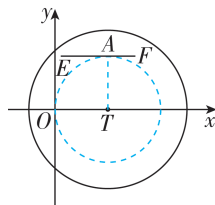


图(4)

$$\therefore TA = 3 = \sqrt{2}t,$$

$$\text{解得 } t = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

② EF 和半径为 t 的圆相切时, 如图,

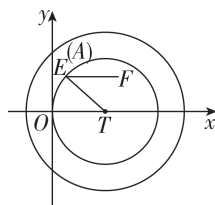


图(5)

$\therefore t = 3$ (不包含临界值),

$$\therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq t < 3;$$

③ 当 E 在半径为 t 的圆, 如图,



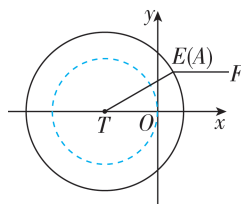
图(6)

$$\therefore t^2 = (t-1)^2 + 3^2,$$

解得 $t = 5$ (不包含临界值),

$\therefore t > 5$ 时, E, F 都在 $\odot T$ 内部, 此时 $\alpha = 180^\circ$;

④ 当 F 在半径为 $\sqrt{2}t$ 的圆, 如图,



图(7)

设 $\odot T$ 的半径为 r , 则 $t = -r$,

$$\therefore 3^2 + (r+1)^2 = (\sqrt{2}r)^2,$$

$$\text{解得 } r = 1 + \sqrt{11},$$

$\therefore t \leq -1 - \sqrt{11}$ 时, 此时 $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$;

综上所述, $\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq t < 3$ 或 $t > 5$ 或 $t \leq -1 - \sqrt{11}$. (7 分)